Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $a \neq 0$ tali che

$a|b$ e $a|c \Rightarrow \boxed{a|b+c}?$ $\boxed{a|b-c}?$

ESEMPIO:

$4|12$ e $4|20 \Rightarrow 4|12+20 \Rightarrow 4|32$ SI

$4|12-20 \Rightarrow 4|-8$ SI

IN GENERALE $\boxed{a|nb+mc}$ (1) $n, m \in \mathbb{Z}$

$4|3\cdot 12+2\cdot 20 \Rightarrow 4|36+40 \Rightarrow 4|76$ SI

IN PARTICOLARE

SE $c = a \Rightarrow \boxed{a|hb+Ka}$ (2)

$4|3\cdot 12+2\cdot 4 \Rightarrow 4|36+8 \Rightarrow 4|44$ SI

$4|3\cdot 12-2\cdot 4 \Rightarrow 4|36-8 \Rightarrow 4|28$ SI

APPLICAZIONE: Per quali valori di $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{3n}{n+5}$ è ~~deve essere~~ intero e divisibile per 4?

$\frac{3n}{n+5}$ SIA INTERO $\Rightarrow n+5|3n \Rightarrow$ (2)

$n+5|3n-3(n+5) \Rightarrow n+5|\cancel{3n}-\cancel{3n}-15 \Rightarrow n+5|-15$

$n+5 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15 \Rightarrow n = \pm 1 - 5 = \begin{cases} -4 \\ -6 \end{cases}$;

$n = \pm 3 - 5 = \begin{cases} -2 \\ -8 \end{cases}$; $n = \pm 5 - 5 = \begin{cases} 0 \\ -10 \end{cases}$; $n = \pm 15 - 5 = \begin{cases} +10 \\ -20 \end{cases}$

ADESSO CONSIDERIA CHE LA FRAZIONE DEVE ESSERE DIVISIBILE PER 4:

Poiché il denominatore $n+5$ è un divisore di 15, non contiene fattori 2, dunque basta imporre che $3n$ sia multiplo di 4, cioè che n sia multiplo di 4.

$n = -4, -8, 0, -20$

VERIFICA

$n=-4 \Rightarrow \dfrac{3\cdot(-4)}{-4+5} = \dfrac{-12}{1} = -12$ SI

$n=-8 \Rightarrow \dfrac{3\cdot(-8)}{-8+5} = \dfrac{-24}{-3} = 8$ SI

$n=0 \Rightarrow \dfrac{3\cdot 0}{0+5} = \underline{\underline{0}}$ $\underline{\underline{\text{SI}}}$

N.B. (0 è divisibile per qualunque numero)

$n=-20 \Rightarrow \dfrac{3(-20)}{-20+5} = \dfrac{-60}{-15} = 4$ SI

PROBLEMA SULLA FATTORIZZAZIONE

In una scatola ci sono 20 palline numerate da 1 a 20. Quante palline dobbiamo estrarre come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 12?

Ragioniamo al contrario.

Quante possono essere al massimo le palline in modo che il prodotto non sia multiplo di 12?

Poiché $12 = 2^2 \cdot 3$, allora il prodotto delle palline estratte non deve essere multiplo di $2^2 = 4$ (*)

oppure non deve essere multiplo di 3 (*)(*)

(almeno una delle due condizioni!)

(*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

Tutti i dispari + 2 (oppure 10, 14, 18 che contengono 2, ma non 4, mai insieme perché il loro prodotto è 4)

QUESTI MAI INSIEME PERÒ!

11 palline in tutto

(*)(*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

Tutti i non multipli di 3 che sono 14.

Per massimizzare il numero di palline scegliamo ~~...~~ di evitare che il prodotto sia multiplo di 3, e quindi questo ci permette di estrarne 14. Estraendo 15 palline quindi siamo sicuri che il prodotto sarà multiplo di 12.

NUMERI PRIMI

DEFINIZIONE: $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, p è primo se è divisibile per 1 e per se stesso.

EQUIVALENTEMENTE:

p è primo se $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$ $\; p \mid (a \cdot b) \Rightarrow (p \mid a$ o $p \mid b)$

$\forall$ ⇕ Per ogni; o ↓ oppure

$$5 \mid (15 \cdot 16) \Rightarrow \overset{\text{SI}}{5 \mid 15} \text{ opp. } \overset{\text{NO}}{5 \mid 16}$$ (VERO perché è vera la prima)

$$6 \mid (15 \cdot 10) \not\Rightarrow \underset{\text{NO}}{6 \mid 15} \text{ opp. } \underset{\text{NO}}{6 \mid 10}$$

INFATTI 5 è primo, ma 6 NO.

COME SI PUÒ VERIFICARE CHE UN NUMERO n È PRIMO IN MODO VELOCE?

Sia $n = 101$, considero $\sqrt{n} = \sqrt{101} \simeq 10$

controllo se 101 è divisibile per i primi minori di 10,

2 NO, 3 NO, 5, NO, $\quad \begin{array}{r|l} 101 & 7 \\ \hline 7 & 14 \\ 31 & \\ 28 & \\ \hline 3 & \end{array} \Rightarrow 7$ NO,

allora posso affermare che 101 è primo perché se ci fosse un divisore a più grande di $\sqrt{101} \simeq 10$, allora ci dovrebbe essere un divisore b più piccolo di 10 in modo tale che $n = a \cdot b$, ma se non c'è più piccolo non c'è più grande e viceversa.

99 NON È PRIMO, $\sqrt{99} \simeq 10$ $\quad D = 1, 3, 9, 11, 33, 99$ QUELLI PIÙ PICCOLI ...

Fattorizziamo $n = 1232100$

$1232100 = 12321 \cdot 10^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 12321 = (*)$

Si potrebbe dividere per tre, ma....

$$\begin{array}{r} 1\times \\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11\times \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111\times \\ 111 \\ \hline 111 \\ 111 \\ 111 \\ \hline 12321 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111\times \\ 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

SONO MULTIPLICAZIONI

Continui?

Sono palindromi?

$(*)$ $2^2 \cdot 5^2 \cdot (111)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 37^2$

Quanti divisori ha 12?

$12 = 2^2 \cdot 3^1$ Tutti i divisori hanno una struttura del tipo $2^\alpha 3^\beta$ con $\alpha = 0, 1, 2$
$\beta = 0, 1$

Infatti $2^0 \cdot 3^0 = 1$; $2^1 \cdot 3^0$

3 possibili scelte

$2^0 \begin{cases} 3^0 = 1 \\ 3^1 = 3 \end{cases}$ due possibili scelte

$2^1 \begin{cases} 3^0 = 2 \\ 3^1 = 6 \end{cases}$ $\qquad 3 \times 2 = 6$

$2^2 \begin{cases} 3^0 = 4 \\ 3^1 = 12 \end{cases}$

IN GENERALE POSSIAMO GENERALIZZARE

SE $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ quanti sono i divisori?

Sono divisori tutti gli $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$

con $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, ... , $0 \le \beta_k \le \alpha_k$

Il prodotto $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$ ci dà il numero di divisori di n che indichiamo $\underline{\underline{d(n)}}$

CONSEGUENZA

Quali sono i numeri n tali che $d(n)$ è dispari?

ESEMPI:

$$d(12) = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 12 & 6 & 4 \end{array}$$

PRODOTTO 12? SONO IN NUMERO PARI

$$d(16) = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cancel{3} & 4 \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 16 & 8 & & \end{array}$$

SONO IN NUMERO DISPARI

CON SE STESSO EVENTUALMENTE

16 è un quadrato, 12 no.

INFATTI SE CONSIDERIAMO LA FORMULA

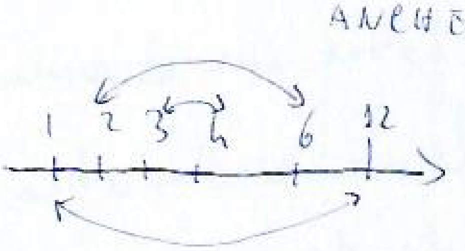
$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$, il risultato è dispari se nessuno degli α_k+1 è pari,

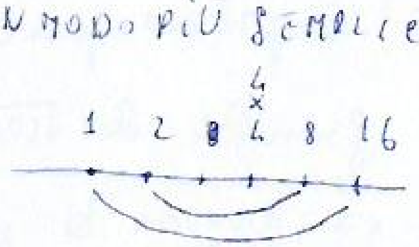
ma quindi se α_k+1 è dispari $\rightarrow$ α_k è pari

quindi $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots p_k^{\alpha_k} = p_1^{2\gamma_1}\cdot p_2^{2\gamma_2}\cdots p_k^{2\gamma_k}$

$= \left(p_1^{\gamma_1}\cdot p^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k}\right)^2$ e quindi n è un quadrato.

ANCHE COSÌ IN MODO PIÙ SEMPLICE





IL DIVISORE CENTRALE È PROPRIO LA $\sqrt{16} = 4$