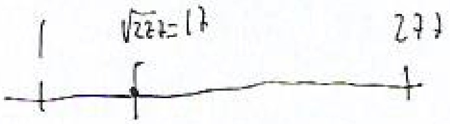
$n = 277$ è primo? (1)

ALGORITMO RADICE QUADR

2.77	16,6
1	~~27 × 7 = 189~~
177	26 × 6 = 156
156	326 × 6 = 1956
= 2100	
1956	
R	

$\sqrt{277} \simeq 17$

div(n) =



2 NO!, 3 NO!, 5 NO!

7?
$$\begin{array}{l|l} 277 & 7 \\ \hline 21 & 39 \\ =67 & \\ 63 & \\ 4 & \end{array}$$
7 NO!

11 NO!

13?
$$\begin{array}{l|l} 277 & 13 \\ \hline 26 & 21 \\ 17 & \\ 13 & \\ R & \end{array}$$
13 NO!

17!
$$\begin{array}{l|l} 277 & 17 \\ \hline 17 & 16 \\ 107 & \\ 102 & \\ 5 & \end{array}$$
No!

QUINDI 277 è primo, perché se non può avere divisori minori di $\sqrt{277} \simeq 17$, allora non può averne nemmeno di maggiori.

$n = 276$

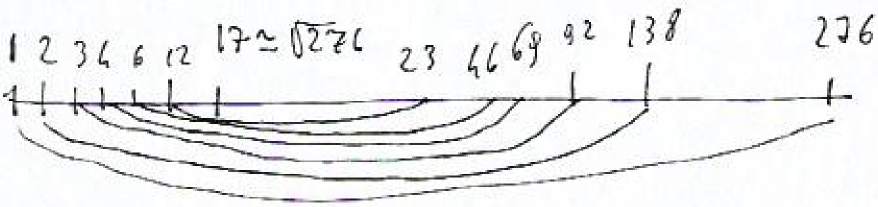
$$\begin{array}{r|l} 276 & 2 \\ 138 & 2 \\ 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 23^1$ (*)

div(276) = 3 · 2 · 2 = 12 ← (2+1)(1+1)(1+1)

div(276) = $\begin{cases} 1 \quad 2 \quad 3 \\ 276 \quad 138 \quad \cancel{69} \quad 92 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 \quad 6 \quad 12 \\ 69 \quad 46 \quad 23 \end{cases}$



$d(276) = 12$ sono pari? è sempre così?

$n = 256 = 2^8$

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

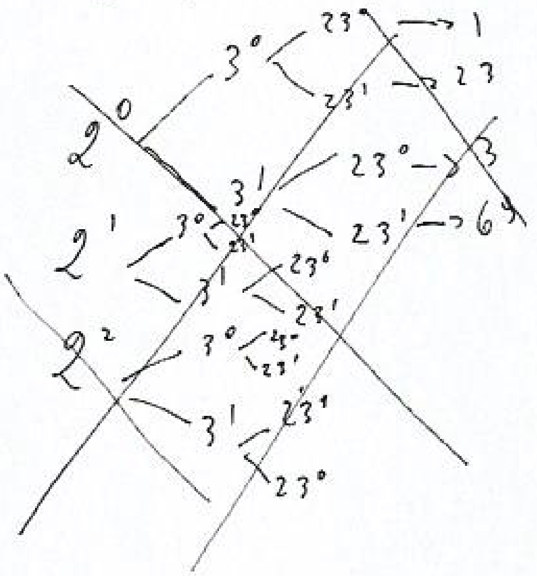
$div(256) = (8+1) = 9$ DISPARI

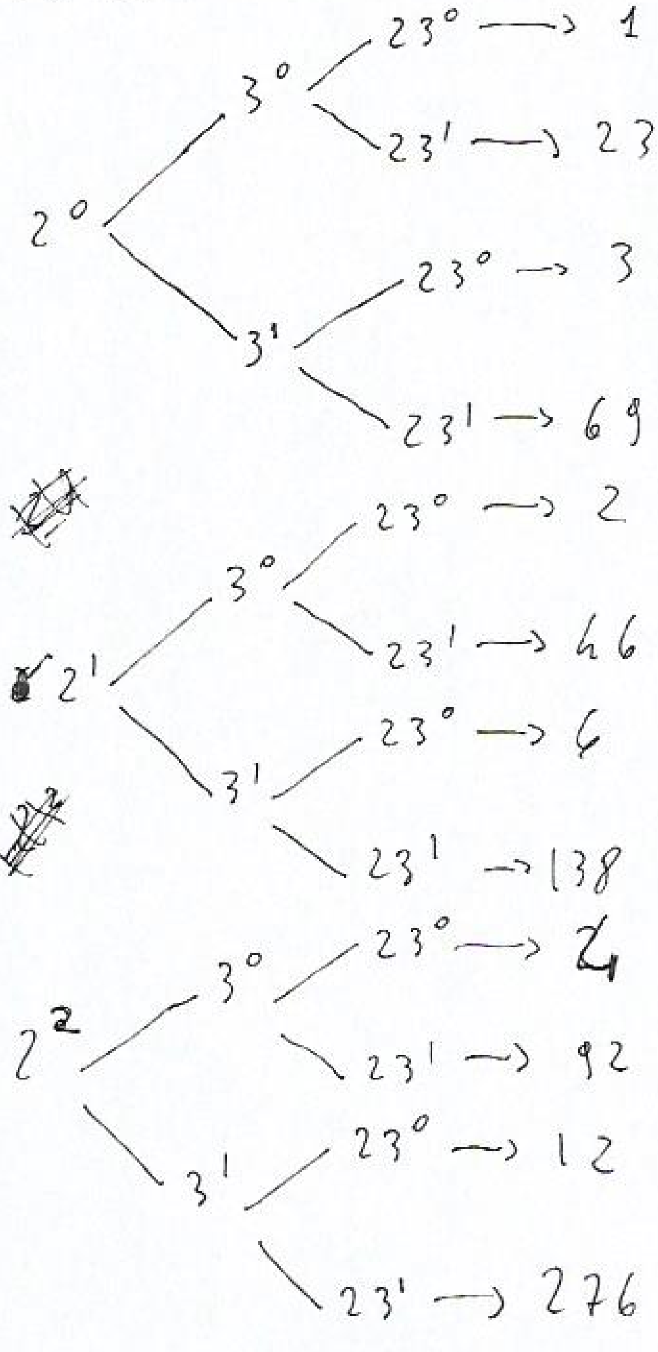
$\sqrt{256} = 16$ è un quadrato!

(*) (*)

(*) TROVO I DIVISORI DI 276 IN MODO SISTEMATICO

$276 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 23^1$





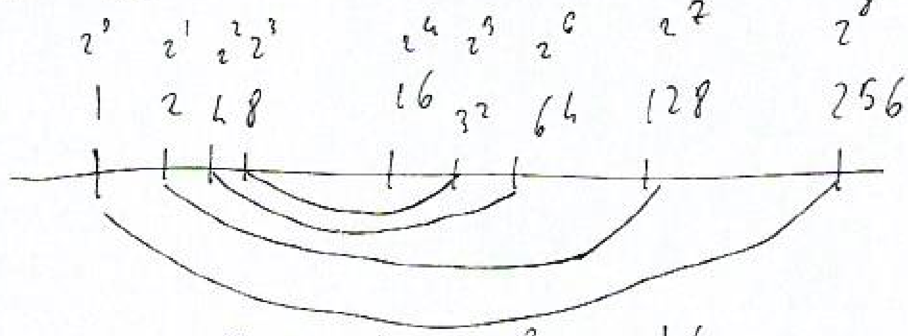
3 POSSIBILITÀ PER 2

2 POSSIBILITÀ PER 3

2 POSSIBILITÀ PER 23

$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ POSSIBILITÀ

* *



1 2 4 8 16

SONO DISPARI

256 128 64 32 ?(Per se stesso)

TUTTI I QUADRATI HANNO UN NUMERO DISPARI DI DIVISORI!

Voglio sommare i divisori di 256

$$1+2+4+8+16+32+64+128+256=?$$

La sequenza di numeri 1, 2, 4, 8 ....
si chiama successione o progressione geometrica
di ragione (rapporto) 2.

Infatti: $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=\dots=2$

Vale la seguente formula

$$1+p^1+p^2+\dots+p^n=\frac{p^{n+1}-1}{p-1}=\frac{1-p^{n+1}}{1-p} \text{ con } p\neq 1$$

Infatti: $(1-p)(1+p+\dots+p^n)=1+\cancel{p}+\cancel{\dots}+\cancel{p^n}-\cancel{p}-\cancel{p^2}-\dots-p^{n+1}$

Se $p=1 \to 1+\underbrace{1+1+\dots+1}_{n}=1+n$

$$1+2^1+2^2+\cdots+2^8=\frac{2^{8+1}-1}{2-1}=\frac{2^9-1}{1}=512-1=\underline{\underline{511}}!$$ (4)

$\underline{\underline{N.B.}}$ $$1+2+2^2+\cdots 2^7=\frac{2^8-1}{2-1}=2^8-1=256-1=255$$

QUINDI $$\underbrace{1+2+\quad -2^7}_{2^8-1=255}+2^8=255+256=511$$

$$\underbrace{1+2+2^1+\cdots+2^8}_{511}+\underbrace{2^9}_{512}=1023$$

Voglio sommare i divisori di 276 (SCHEMA PAG.2)

$$2^0\cdot 3^0\cdot 23^0+2^0\cdot 3^0\cdot 23^1+2^0\cdot 3^1\cdot 23^0+2^0\cdot 3^1\cdot 23^1+$$
$$+2^1\cdot 3^0\cdot 23^0+2^1\cdot 3^0\cdot 23^1+2^1\cdot 3^1\cdot 23^0+2^1\cdot 3^1\cdot 23^1+$$
$$+2^2\cdot 3^0\cdot 23^0+2^2\cdot 3^0\cdot 23^1+2^2\cdot 3^1\cdot 23^0+2^2\cdot 3^1\cdot 23^1=$$
$$=2^0\cdot(3^0\cdot 23^0+3^0\cdot 23^1+\cancel{2^0}\cdot 3^1\cdot 23^0+3^1\cdot 23^1)+$$
$$+2^1\cdot(3^0\cdot 23^0+3^0\cdot 23^1+3^1 23^0+3^1\cdot 23^1)+$$
$$+2^2\cdot(\qquad // \qquad)=$$

$$(2^0+2^1+2^2)\,\overbrace{(3^0\cdot 23^0+3^0\cdot 23^1+3^1 23^0+3^1\cdot 23^1)}^{☆}=⊛$$

$$☆\ 3^0\cdot(23^0+23^1)+3^1(23^0+23^1)=(3^0+3^1)(23^0+23^1)$$

$$⊛=\overbrace{(2^0+2^1+2^2)}^{7}\overbrace{(3^0+3^1)}^{4}\overbrace{(23^0+23^1)}^{24}=\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\cdot\frac{23^{1+1}-1}{23-1}$$
$$=\cancel{\frac{9-1}{2}}\ \cancel{\frac{23^2-1}{}}\ \frac{8-1}{1}\cdot\frac{9-1}{2}\cdot\frac{23^2-1}{22}=7\cdot 4\cdot 24=672$$

Voglio calcolare il <u>prodotto</u> dei divisori di 256. (QUADRATO) (5)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cancel{4} & 8 & 16 \\ \times & \times & \times & \times & \\ 256 & 128 & 64 & 32 & \end{array} \Bigg\} \text{ div(n) SONO DISPARI!}$$

$$256 \times 256 \times 256 \times 256 \times \sqrt{256}$$

$$2^8 \times 2^8 \times 2^8 \times 2^8 \times \sqrt{2^8} = (2^8)^4 \times 2^{\overset{4 = \frac{8}{2}}{4}} =$$

$$= 2^{8\times 4} \times 2^4 = 2^{8\times 4 + 4} = 2^{4\times(8+1)} = (2^4)^9 = 16^9 = (\sqrt{256})^9 =$$

ANCHE COSÌ $2^{32} \cdot 2^4 = 2^{36} = (2^4)^9 = (16^9) \longrightarrow$

$$= (\sqrt{n})^{div(n)}$$

$n = 256$ (QUADRATO) $\rightarrow$ IL PRODOTTO DEI DIVISORI È $(\sqrt{256})^9 = \boxed{(\sqrt{n})^{div(n)}}$ <u>FORMULA GENERALE</u>

Voglio calcolare il <u>prodotto</u> dei divisori di 276

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 12 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 276 & 138 & 92 & 69 & 46 & 23 \end{array} \Bigg\} \text{ div(n) SONO PARI!}$$

$$276 \times 276 \times 276 \times 276 \times 276 \times 276$$

$$\underbrace{\underbrace{2^2 \cdot 3 \cdot 23} \times \underbrace{2^2 \cdot 3 \cdot 23} \times \underbrace{2^2 \times 3 \times 23} \times \underbrace{2^2 \times 3 \times 23} \times \underbrace{2^2 \times 3 \times 23} \times \underbrace{2^2 \times 3 \times 23}}_{\text{6 VOLTE}} =$$

$$= (2^2 \cdot 3 \cdot 23)^6 = (276)^6 = n^{div(n)/2} \longrightarrow 6 = \frac{12}{2}$$

$n = 276$ (NON È QUADRATO) $\rightarrow$ IL PRODOTTO DEI DIVISORI È $276^6 = n^{div(n)/2}$

ALGORITMO DI EUCLIDE

MCD

IL METODO DELLA FATTORIZZAZIONE PUÒ ESSERE MOLTO LUNGO!

ALTERNATIVA VELOCE: Algoritmo di Euclide

5 10 15

$a = 15$

5 6

$b = 6$

5 9

$a - b = 9$

5 9

$a - \cancel{b}$

b 5 6

$\cancel{(a-b)-b = 6}$ $\cancel{(a-b)-b = 3}$ ~~è MCD~~

3 $a - b = 3$

~~INVECE DI SOTTRARRE PIÙ VOLTE, POSSO DIVIDERE~~

6

a

3

b

$a - b$

$a - b = 3$

a

3

b

3

$a - b = 0$

MCD è 3 ULTIMA DIFF. $\neq 0$

Posso dividere è più veloce che sottrarre.

$$\begin{array}{l} a \quad\ b \\ 15 : 9 \\ \underline{\ 9\ } \quad\ 1 \\ \ 6_r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9 : 6 \\ \underline{\ 6\ } \quad 1 \\ \ 3 \end{array}$$

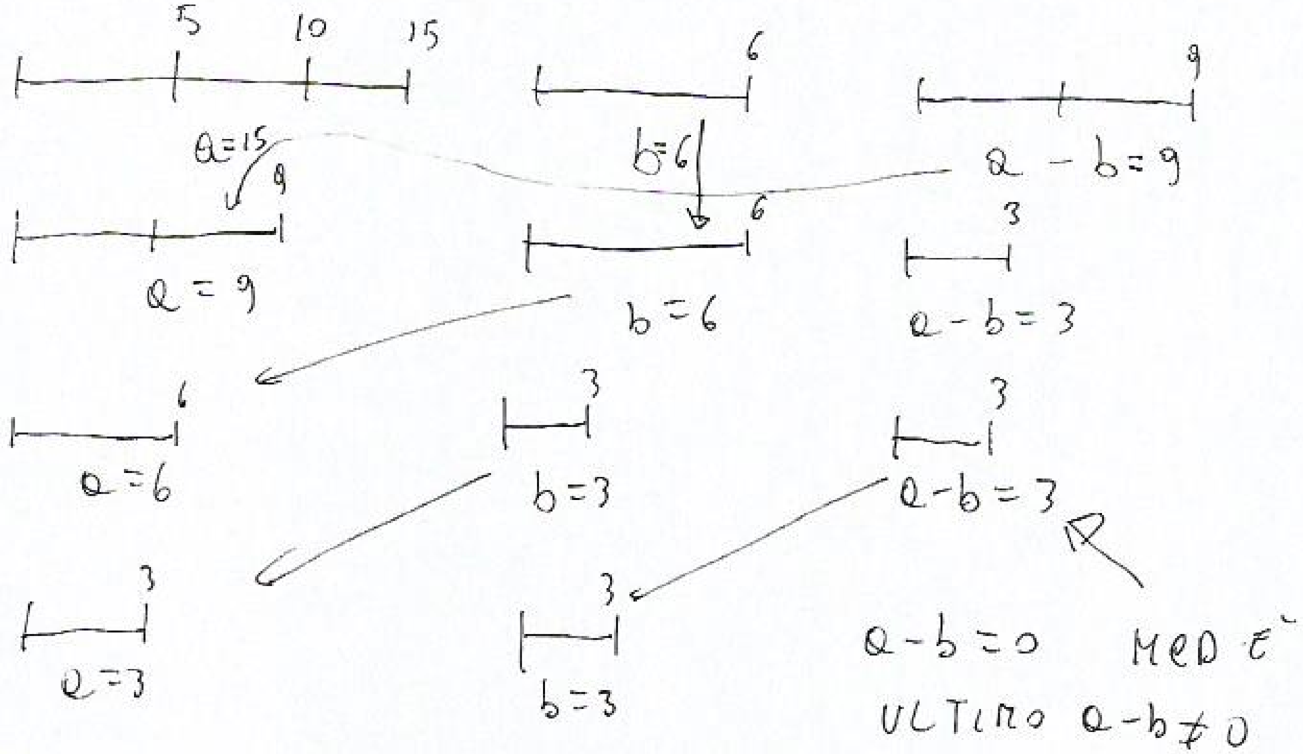
a	b	r
15	9	6
9	6	3
6	3	0

MCD è ultimo $r \neq 0$

ALGORITMO DI EUCLIDE

MCD

Il metodo della fattorizzazione può essere molto lungo!
Abbiamo bisogno di alternative veloci!
EUCLIDE CONCEPISCE QUESTO ALGORITMO CON I SEGMENTI!



Troppo lungo sottrarre, più veloce dividere

a	b	r
15	9	6
9	6	3
6	3	0

MCD è ultimo resto $\neq 0$

E il m.c.m?

Proprietà $a \cdot b = MCD \times mcm$

Infatti $15 \cdot 9 = 3 \times 3^2 \times 5$

$3 \cdot 5 \cdot 3^2 = 3 \times 3^2 \cdot 5$ vero!

QUINDI $mcm = \frac{a \times b}{MCD} = \frac{\cancel{15}^{5} \times 9}{\cancel{3}} = 45$!