SISTEMI DI NUMERAZIONE

Il sistema di numerazione che utilizziamo normalmente è composto da 10 cifre, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ed è <u>posizionale</u>, cioè le cifre hanno un valore, oltre che per se stesse, per la posizione che occupano nel numero stesso.

La cifra <u>0</u>, che da sola rappresenta il <u>niente</u>, (arabo sifr) nei numeri di più cifre fa assumere valore diverso alle altre cifre.

dall'indiano

ESEMPI! $17 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

$107 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

In generale in base 10

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \overset{1}{\overset{\|}{(10^0)}}$$

si può omettere

con $a_k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9$

Ma si possono concepire sistemi di numerazione <u>diversi da base 10</u>.

Se la base è b avremo b cifre da $0, 1, \dots, b-1$

ed $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0$

Esempio: <u>base 2</u>; $a_k = 0, 1$ → bit (<u>bi</u>nary digi<u>t</u>)

$$1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8_{10} + 0 + 0 + 1_{10} = 9_{10}$$

Esempio: <u>base 8</u> (OTTALE) $a_k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$1001_8 = 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 512_{10} + 1_{10} = 513_{10}$$

base 16 (esadecimale)

$$a_k = 0, 1, 2, 3, \dots, 9, \overset{10}{A}, \overset{11}{B}, \overset{12}{C}, \overset{13}{D}, \overset{14}{E}, \overset{15}{F}$$

$$1001_{16} = 1\cdot 16^3 + 0\cdot 16^2 + 0\cdot 16^1 + 1\cdot 16^0 =$$

$$= 4096_{10} + 1_{10} = 4097_{10}$$

Il sistema di numerazione esadecimale è molto utilizzato in elettronica ed informatica per gli indirizzi delle memorie digitali.

TRASFORMAZIONI DI BASE

Dato un numero, ad esempio 126_{10}, la cifra delle unità 6 non è altro che il resto della divisione di 126 per 10, ma la cifra delle decine 2, altro non è che il resto della divisione del primo quoziente 12 per 10, e così via. (1 è più piccolo di 10 e non dividiamo più)

$$\begin{array}{r|l} 126 & 10 \\ \hline 10 & 12 \\ \hline 26 & \\ 20 & \\ \hline 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 10 \\ \hline 10 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Si può vedere questa proprietà anche sotto questo aspetto:

$$126_{10} = 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 6 = 10\cdot(1\cdot 10^1 + 2) + 6$$

cioè $126_{10} = \underbrace{(1\cdot 10^1 + 2)\cdot 10}_{\text{DIVISIBILE PER 10}} + 6 \to$ RESTO DELLA DIVISIONE PER 10

SE CONTINUIAMO SUL QUOZIENTE 12

$12_{10} = \underbrace{1\cdot 10}_{\text{DIVISIBILE PER 10}} + 2 \to$ RESTO DELLA DIVISIONE PER 10

Questo esempio può essere utile per trasformare un numero decimale in un'altra base, effettuando divisioni per b.

Esempio: trasformiamo 3799_{10} nella sua forma in base 16:

$$
\begin{array}{r|l}
3799 & 16 \\ \hline
32 & 237 \\
59 & \\
48 & \\
119 & \\
112 & \\
7 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
237 & 16 \\ \hline
16 & 14 \to E \\
77 & \\
64 & \\
13 &
\end{array}
$$

7 cifra delle "unità"

13 D secondo resto cifra delle "decine"

Poiché 14 (E) è minore di 16 non si divide più

$$3799_{10} = ED7_{16}$$

INFATTI $ED7_{16} = E \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + 7 =$

$= 14 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16 + 7 = 14 \cdot 256 + 208 + 7 = 3584 + 208 + 7 =$

$= 3799_{10}$

ESEMPIO: $126_{10} = \underline{\ ?\ }_2$

126	2	R=0
63	2	R=1
31	2	R=1
15	2	R=1
7	2	R=1
3	2	R=1
1	2	R=1

64 32 16 8 4 2 1

$1111110_2 = 64+32+16+8+4+2 = 126_{10}$

Per trasformare un numero da una base $b_1 \neq 10$ ad una base $b_2 \neq 10$ si potrebbe trasformare il numero in base b_1 nella base 10, e poi con le divisioni successive per b_2, trasformarlo in base b_2.

IL PASSAGGIO TRA LE BASI: 2, 8, 16 È PARTICOLARMENTE SEMPLICE!

Consideriamo il numero di prima $1111110_2 =$

$= 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 =$

- Lo vogliamo trasformare in base $8 = 2^3$

Se dividessimo per $2^3 = 8$ otterremmo come quoziente

$2^3 + 2^2 + 2^1 + 1$ con RESTO $2^2 + 2^1 = 6$

NELLA DIVISIONE PER 8

CIFRA DELLE "UNITÀ"

Se continuiamo a dividere per $2^3 = 8$ il quoziente ottenuto prima $2^3 + 2^2 + 2^1 + 1$ otteniamo come quoziente 1 e come resto $2^2 + 2^1 + 1 = 7$

CIFRA DELLE "DECINE"

L'ULTIMO QUOZIENTE È MINORE DI 8 E NON DIVIDIAMO PIÙ.

ABBIAMO OTTENUTO $176_8 = 1\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 6 =$

$= 64 + 56 + 6 = 126_{10}$

QUESTO ESEMPIO CI SUGGERISCE UN PROCEDIMENTO MOLTO SEMPLICE PER PASSARE DA BINARIO AD OTTALE, POICHÉ BASTA PRENDERE I BIT A GRUPPI DI TRE PARTENDO DA DESTRA E TRASFORMARLI IN CIFRE OTTALI $\ldots\underbrace{1}_{1}.\underbrace{\overset{4\,2\,1}{111}}_{7}.\underbrace{\overset{4\,2\,1}{110}}_{6}{}_2 \rightarrow 176_8$

ALLORA IL PASSAGGIO DA BINARIO AD ESADECIMALE SI PUÒ FARE PRENDENDO I BIT A GRUPPI DI 4:

$$\underbrace{111}_{7}\,\underbrace{1110}_{14 \to E} \to 7E_{16}$$

INFATTI $7E_{16} = 7 \cdot 16 + 14 = 112 + 14 = 126_{10}$

ESEMPIO:

QUALE È LA CIFRA DELLE UNITÀ DI 123^{50}?

LA CIFRA DELLE UNITÀ IN BASE 10 SI PUÒ OTTENERE COME RESTO DELLA DIVISIONE PER 10!

$$123^{50} = \underbrace{123 \cdot 123 \cdot \ldots \cdot 123}_{50 \text{ VOLTE}} \overset{(\text{mod } 10)}{\equiv} \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{50 \text{ VOLTE}} = 3^{50}$$

QUESTO CI HA PERMESSO DI SEMPLIFICARE IL PROBLEMA, MA NON È COSÌ SEMPLICE OPERARE SULL'ESPONENTE,

$[6]_5 \equiv [1]_5$ ma $[2^6]_5 \equiv [64]_5 \equiv [4]_5$

mentre $[2^1]_5 \equiv [2]_5$ DUNQUE POTENZE CON LA STESSA BASE E CON ESPONENTI CONGRUENTI NON È DETTO CHE SIANO CONGRUENTI

OSSERVIAMO CHE:

$[3^1]_{10} \equiv [3]_{10}$ $[3^2]_{10} \equiv [9]_{10}$ $[3^3]_{10} \equiv \underbrace{[3^2]_{10}[3^1]_{10}}_{\text{PROPRIETÀ DEL RESTO DEL PRODOTTO}} \equiv$

~~PROPRIETÀ DELLE POTENZE~~

$\equiv [9]_{10}[3]_{10} \equiv [27]_{10} \equiv [7]_{10}$

$[3^4] \equiv [3^3]\cdot[3^1] \equiv [7]_{10}\cdot[3]_{10} \equiv [21]_{10} \equiv [1]_{10}$

$[3^5]_{10} \equiv [3^4]_{10}[3^1]_{10} \equiv [1]_{10}\cdot[3]_{10} \equiv [3]_{10}$

$[3^6]_{10} \equiv [3^5]_{10}\cdot[3^1]_{10} \equiv [3]_{10}\cdot[3]_{10} \equiv [9]_{10}$

$[3^7]_{10} \equiv [3^6]_{10}\cdot[3]_{10} \equiv [9]_{10}\cdot[3]_{10} \equiv [27]_{10} \equiv 7$

$[3^8]_{10} \equiv [3^7]_{10} \cdot [3^1]_{10} \equiv [7]_{10} \cdot [3^1]_{10} \equiv [21]_{10} \equiv [1]_{10}$

Ma allora la congruenza si ripete a gruppi di

4 ELEMENTI: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ...

$[50]_4 \equiv [2]_2 \rightarrow [3^{50}]_{10} \equiv [3^2]_{10} \equiv [9]_{10}$

QUINDI 9 È LA CIFRA DELLE UNITÀ.

ESEMPIO: QUALE È LA CIFRA DELLE UNITÀ
DI $\frac{66^{66}}{2}$?

LA DIFFERENZA CON PRIMA È LA DIVISIONE PER 2!

$[66^{66}]_{10} \equiv [6^{66}]_{10} \equiv [6]_{10}$

QUANDO DIVIDIAMO PER 2 $\left[\frac{66^{66}}{2}\right]_{\frac{10}{2}} \equiv \left[\frac{6}{2}\right]_{\frac{10}{2}}$

DOBBIAMO DIVIDERE PER 2 ANCHE 10

$m' = \frac{m}{MCD(2,10)} = \frac{10}{2} = 5$

$\left[\frac{66^{66}}{2}\right]_5 \equiv [3]_5$, ma $[3]_5 \equiv [8]_5$

DUNQUE L'ULTIMA CIFRA (UNITÀ) POTREBBE ESSERE 3 op. 8;

ma $\frac{66^{66}}{2} = \frac{2^{66} \cdot 33^{66}}{2} = 2^{65} \cdot 33^{66}$ e è pari

dunque la cifra delle unità è 8

ALTERNATIVAMENTE SI PUÒ LAVORARE MOD 20

$$[66^{66}]_{20} \equiv [6^{66}]_{20} \equiv [16]_{20}$$

$6, 36, 216, \ldots$

MA $\left[\frac{66^{66}}{2}\right]_{\frac{20}{2}} \equiv \left[\frac{16}{2}\right]_{\frac{20}{2}} \equiv [8]_{10}$

UN ALTRO MODO È DI SCOMPORRE IL NUMERO:

$$\frac{66^{66}}{2} = 2^{65} \cdot 33^{66}$$

Le potenze di 2 si ripetono modulo 10 ogni 4:

$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$

e anche le potenze di 3 si ripetono ogni 4 modulo 10:

$3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots$

Dunque

$$[2^{65} \cdot 3^{66}]_{10} \equiv [2^1]_{10} \cdot [3^2]_{10} \equiv [18]_{10} \equiv [8]_{10}$$

CRITERI DI DIVISIBILITÀ E CONGRUENZE

1) DIVISIBILITÀ PER $2=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, ...

ESEMPIO: $n=1648$ SCRIVIAMOLO IN BASE 10:

$$n = 1648 = 1\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0$$

Poiché 2^1 è divisore sia di 10^3, che di 10^2 che di 10^1

a) n è divisibile per 2 se l'ultima cifra, in questo caso 8, è divisibile per 2!

b) Poiché $2^2=4$ è divisore sia di 10^3 che di 10^2, (ma non di 10!), n è divisibile per $4=2^2$, se $4\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0 = 48$, (il numero composto dalle due ultime cifre) è divisibile per 4.

c) Poiché $2^3=8$ è divisore di 10^3 (ma non di 10^2 e 10^1) n è divisibile per 8 se $6\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 8 = 648$ (cioè il numero composto dalle ultime tre cifre è divisibile per 8)

d) Analogamente per $2^4=16$ ed altre potenze di 2 maggiori di 4.

Chiaramente l'esempio $n=1648$ va bene per tutte e quattro le divisibilità.

DIVISIBILITÀ PER $5^1, 5^2, \ldots$

$n = 1648 = 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

a) Come primo 5 è divisore di $10^3, 10^2, 10$ e dunque è un divisore di n se divide 8, cioè l'ultima cifra.

b) $5^2 = 25$ è divisore di 10^3 e 10^2, dunque è divisore di n se divide $4 \cdot 10^1 + 8 = 48$ (cioè il numero formato dalle ultime due cifre; 25, 50, 75, 00 (100 = 4·25))

c) Analogamente per le altre potenze di 5!

Chiaramente n nel nostro caso non è divisibile per nessuna potenza di 5.

Divisibilità per 3 e per 9

$[10^n]_3 \equiv [1]_3$ e $[10^n]_9 \equiv [1]_9$

Poiché $[10]_3 \equiv [1]_3$ e $[10]_9 \equiv [1]_9$ applicando il teorema del prodotto sulle congruenze

$n = 1648 = 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \overset{\text{mod}_3 \text{ e mod}_9}{\equiv}$

$\equiv 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8 = 1 + 6 + 4 + 8$

cioè n è divisibile per 3 o per 9 se la somma delle sue cifre è divisibile per 3 o per 9.

DIVISIBILITÀ PER 11

$[10]_{11} \equiv [-1]_{11}$ INFATTI

$10-(-1)=11$ che è divisibile per 11!

ma $[10^2]_{11} \equiv [10]_{11} \cdot [10]_{11} \equiv [-1]_{11} \cdot [-1]_{11} \equiv +1$

Infatti anche con la divisione:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 11 \\ 99 & 9 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$1 \to$ RESTO $+1$

E QUESTO PERÒ SI RIPETE ALTERNATIVAMENTE PER LE POTENZE PARI E PER QUELLE DISPARI DI 10!

$[10^3]_{11} \equiv [10]_{11} \cdot [10]_{11} \cdot [10]_{11} \equiv [-1]_{11} \cdot [-1]_{11} \cdot [-1]_{11} \equiv -1$

Oppure con la divisione:

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 11 \\ 99 & 90 \\ \hline 10 & \end{array}$$

$10 \to [10]_{11} \equiv [-1]_{11}$

Quindi $n = 1648 = 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \equiv$

(mod 11)

$\equiv 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (+1) + 4 \cdot (-1) + 8 \cdot (+1) \equiv$

$\equiv -1 + 6 - 4 + 8 = -5 + 14 = 9$ che non è divisibile per 11!

RESTO DELLA DIVISIONE PER 11

In realtà basta prendere le cifre con segni alterni in modo qualsiasi, anche se a rigore le potenze di 10 dispari dovrebbero avere il segno (−) e quelle pari il segno (+).

DIVISIBILITÀ PER 7

Consideriamo $n = 686$

686 è divisibile per 7 se lo è anche

$68 - 6 \cdot 2 = 68 - 12 = 56$

56 è divisibile per 7 se lo è anche

$5 - 6 \cdot 2 = 5 - 12 = -7$

Dunque 686 è divisibile per 7.