ESERCIZI DIVISIBILITÀ

1) Per quali primi p esistono due interi positivi x, y tali che $x^2 - y^2 = p$

$\longmapsto$

$(x+y)(x-y) = p$

$+1 \Leftrightarrow +p$
$-1 \Leftrightarrow -p$ } O VICEVERSA

p è primo quindi i suoi divisori sono (± 1) e $(\pm p)$

ma $x+y > x-y$ (SONO INTERI POSITIVI) e poiché $x+y>0 \Rightarrow x-y>0$ (perché il loro prodotto deve essere $p>0$)

$$+\begin{cases} x+y = p \\ x-y = 1 \end{cases}$$
$2x = p+1 \rightarrow x = \frac{p+1}{2}$

$$-\begin{cases} x+y = p \\ x-y = 1 \end{cases}$$
$2y = p-1 \rightarrow y = \frac{p-1}{2}$

$$\begin{cases} x = \frac{p+1}{2} \\ y = \frac{p-1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{SONO INTERE} \Leftrightarrow p \text{ è dispari} \rightarrow p \neq 2$$

2) Dato p primo, determinare x, y interi positivi tali che $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$.

$\longmapsto$

$\frac{y+x}{xy} = \frac{1}{p} \rightarrow p(x+y) = xy \rightarrow$ ~~$xy = (p+x$~~

$\rightarrow xy - p(x+y) = 0$?

$XY - P(X+Y) = 0$?

APRIAMO PARENTESI SU EQUAZIONI SECONDO GRADO!

Polinomio monico

$1 \cdot X^2 - 5X + 6 = 0$ ($x^2 - 5x + 6$ è un polinomio monico, cioè il coeffic. di x^2 è 1)

Posso cercare le soluzioni fra i numeri che moltiplicati danno 6 e sommati danno 5!? (OPPOSTO DI -5)

$\Downarrow$

DIVISORI DI 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

				SOMMA
Prodotto 6 $\to$	$+1$	$+6$	$\to$	7
	-1	-6		-7
	$+2$	$+3$		5
	-2	-3		-5

INFATTI $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$ e $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$

Quindi le soluzioni dell'equazione

$x^2 - 5x + 6 = 0$ sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Il polinomio monico $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

In generale un polinomio monico di secondo grado

$x^2 + Sx + P = (x - x_1)(x - x_2)$ con $S = -(x_1 + x_2)$

$P = x_1 \cdot x_2$

Torniamo alla nostra equazione diofantea

$XY - P(X+Y) = 0$ considerando P come incognita

Se osserviamo l'equazione ~~otteniamo~~
notiamo che ~~..~~ c'è il prodotto xy e la somma $-(x+y)$!?

Quindi se consideriamo l'equazione

$$x^2 - (S_{x_1+x_2})\,x + P_{x_1 x_2}$$

$$p^2 - (x+y)\,p + xy = \overset{x-x_1}{(p-x)}\,\overset{x-x_2}{(p-y)} =$$

$$= (x-p)(y-p)$$

Allora $xy - p(x+y) = 0 \to \underbrace{p^2 - p(x+y) + xy}_{} = p^2$

SOMMO p^2 SU ENTRAMBI I MEMBRI DELL'EQUAZIONE

$$(x-p)\cdot(y-p) = p^2$$

Ma i divisori di p^2 sono $(\pm 1)\ (\pm p)\ (\pm p^2)$

Per ottenere p^2 come prodotto $(\pm 1)\cdot(\pm p^2)$
$(\pm p)\cdot(\pm p)$

Se scegliessimo le soluzioni negative:

1) $\begin{cases} x - p = -p^2 \\ y - p = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -p^2 + p \to x = \overset{>0}{p}\,\overset{<0}{(-p+1)} < 0 \text{ No!} \\ y = p - 1 > 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - p = -p \\ y - p = -p \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ No!

3) $\begin{cases} x - p = p^2 \\ y - p = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = p^2 + p = p(p+1) \\ y = p+1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - p = 1 \\ y - p = p^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = p+1 \\ y = p^2 + p = p(p+1) \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - p = p \\ y - p = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2p \\ y = 2p \end{cases}$

/—/

Quante sono le coppie (a, b) di numeri triangolari tali che $a - b = 2007$? (223 è primo!)

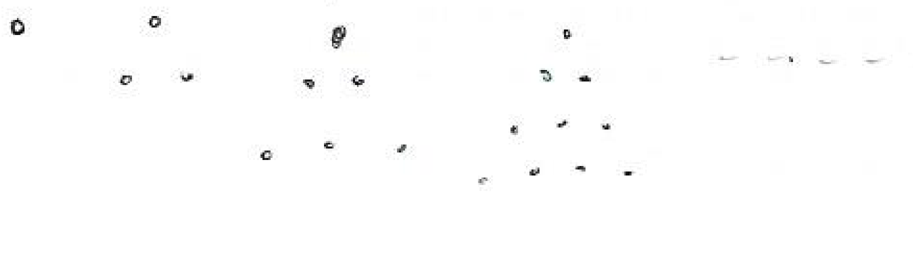
/—/

Un numero intero positivo si dice triangolare se è uguale alla somma di una sequenza di numeri interi positivi a partire da 1.

Esempio: 1, $3 = 2+1$; $6 = 3+2+1$; $10 = 1+2+3+4$; $15 = 1+2+3+4+5$ ....

Sono anche numeri poligonali?, rappresentabili in forma di triangolo

1 3 6 10



Formula $1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$!?

Quindi i numeri triangolari possono essere rappresentati come $a = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e $b = \dfrac{m(m+1)}{2}$ con $n, m \in \mathbb{N}$

$$b - a = 2007 \to \frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 2007$$

$$m(m+1) - n(n+1) = 2 \cdot 2007 \to m^2 + m - n^2 - n = 2 \cdot 2007$$

$$\to m^2 - n^2 + m - n = (m+n)(m-n) + \underbrace{m-n}_{1\cdot(m-n)} = 2 \cdot 2007$$

$$(m-n)\cdot(m+n+1) = 2 \cdot 2007$$

Se poniamo $x = m+n+1$ e $y = m-n$ →

$$x \cdot y = 2 \cdot 3^2 \cdot 223$$

$x, y > 0$

$x > y \iff m+n+1 > m-n$!

$$\to \begin{cases} x = m+n+1 \\ y = m-n \end{cases} \quad + \qquad x + y = 2m+1 \to \boxed{m = \frac{x+y-1}{2}}$$

$$\begin{cases} x = m+n+1 \\ y = m-n \end{cases} \quad - \qquad x - y = 2n+1 \to \boxed{n = \frac{x-y-1}{2}}$$

x	y
$2 \cdot 3^2 \cdot 223$	1
$3^2 \cdot 223$	2
$2 \cdot 3 \cdot 223$	3
$3 \cdot 223$	$2 \cdot 3$
$2 \cdot 223$	3^2
223	$2 \cdot 3^2$

SONO TUTTE VALIDE perché $(x, y) \to (m, n)$ valide cioè $m, n > 0$ → 6 SOLUZIONI (COPPIE)

1) Più piccolo quadrato perfetto, somma di 7 interi consecutivi?

6

$$n+(n+1)+(n+2)+\dots+(n+6)=m^2$$

$$7n+(1+2+3+4+5+6)=m^2$$

$$7n+\frac{\cancel{6}^{3}(6+1)}{\cancel{2}}=m^2 \to 7n+21=m^2$$

VALORE MEDIO ARITMETICO $7\cdot(n+3)=m^2 \to n+3=7$ è sol. $\to n=7-3=4$

$\frac{3+4+5}{3}=4 \to 3+4+5=3\cdot 4$ (è una proprietà del valore medio aritmetico)

$m^2=49$

Ma quali sono gli altri quadrati?

$n+3=k^2\cdot 7$ (infatti $7\cdot k^2\cdot 7=m^2$ è vero!)

$k=1 \to n=4 \to m^2=49$

$k=2 \to n=4\cdot 7-3=25 \to m^2=49\cdot 4=196$

$k=3 \to n=63-3=60 \to m^2=49\cdot 9=441$

$441 \,|\, 21$ $\quad 441=21^2$

$41\times 1=41$

4

041

41

//

2) Puzzle composto da 247 pezzi (rettangolare).
Pezzi sul bordo?

$$\begin{array}{r|l} 247 & 13 \\ 13 & 19 \\ \hline 117 & \\ 117 & \\ \hline // // & \end{array}$$

$247 = 13 \cdot 19$

Divisori: 1, 13, 19, 247 $\quad 1 \times 247$ no

$2 \times 13 + 2 \times 19 - 4 = 60 \quad 13 \times 19$ sì

-4 per non contare due volte gli angoli.

3) $\dfrac{n+2}{n-3}$ è intero per quali $n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{n+2-3+3}{n-3} = \frac{n-3+5}{n-3} = \frac{n-3}{n-3} + \frac{5}{n-3} = 1 + \frac{5}{n-3}$$

$n-3 \mid 5 \to n-3 = \pm 1, \pm 5$

$n-3 = 1 \to n = 4$
$n-3 = -1 \to n = 2$
$n-3 = 5 \to n = 8$
$n-3 = -5 \to n = -2$

Eventualmente controllare!

$$\begin{array}{r|l} n+2 & n-3 \\ -n+3 & 1 \\ \hline // \; 5 & \end{array}$$

Resto

$\to n-3 \mid 5$ se vogliamo che il ~~quoziente~~ QUOZIENTE SIA INTERO

ANCHE $n-3 \mid n+2 \to n-3 \mid n+2-(n-3) = \cancel{n}+2-\cancel{n}+3 = 5$
$\to n-3 \mid 5$

4) Premesse:

Due bus   Durata corse $T_1 = 40$ min

$T_2 = 35$ min

$40 = 2^3 \cdot 5 \qquad 35 = 5 \cdot 7$

m.c.m. $= 2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280$ min

IN 8 ORE QUANTE VOLTE SARANNO

INSIEME ALLA PARTENZA?

8 ORE $= 8 \cdot 60 = 480$ min

1 SOLA VOLTA DOPO 280 min.

1 mese = 30 giorni   1 anno = 12 mesi

Quanti venerdì 17 al massimo in un anno?

$T_1 = 7$ giorni (~~[illegible]~~) → VENERDI $T_2 = 30$ giorni → 17

m.c.m. $= 7 \cdot 30 = 210$ giorni

1 anno $= 12 \cdot 30 = 360$ giorni

AL MASSIMO DUE VENERDI 17

5)

1 settimana = 8 giorni

1 mese = 34 giorni

1 anno = 14 mesi = $14 \cdot 34$ = 476 giorni

$$\begin{array}{r} 34\times \\ 14 \\ \hline 136 \\ 34 \\ \hline 476 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 476 : 8 = 59 \\ 40 \\ \hline 76 \\ 72 \\ \hline =4 \end{array}$$

→ FRA DUE ANNI cioè

$476 \times 2 = \underline{952 \text{ giorni}}$

Si può fare anche così!
Il numero cercato deve essere multiplo di 8 (domenica) e multiplo di $(14 \cdot 34)$ = 1 anno

$8 = 2^3 \qquad 14 \cdot 34 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 17 = 2^2 \cdot 7 \cdot 17$

$\text{mcm}(2^3, 2^2 \cdot 7 \cdot 17) = 2^3 \cdot 7 \cdot 17 = \underline{952}$ giorni

6) $\text{MCD}(3n+17, n+2)$; $n \in \mathbb{Z}$

Algoritmo di Euclide!

$\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(a-b, b) = \text{MCD}(a-3b, b)$

$\text{MCD}(3n+17, n+2) = \text{MCD}(\cancel{3n}+17-\cancel{3n}-6 ; n+2)$

$\text{MCD}(11, n+2)$ → poiché 11 è primo → $\text{MCD} = 1$ se $n+2 \nmid 11$
↳ $\text{MCD} = 11$ se $n+2 \mid 11$

1) $X^3+1=P$ ES. DIOFANTEE!

2) $X^3-1=P$

1) $X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)=P$

2) $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)=P$

$P=1 \to$ 1 NON E' PRIMO!

$X=0 \to$

$X=1 \to 2=P \to X^3=P-1=1$ $\boxed{1, 2}$

Per $X \geq 2$ $X \cdot X \geq 2 \cdot X \to X^2-X+1 \geq 2X-X+1 = X+1 \geq 3$

INOLTRE $X+1 \geq 3$ $(X \geq 2) \to (X+1)(X^2-X+1)$ non è primo!

SONO DUE NUMERI $\neq 1$

$X=0 \to P=-1$?

$X=1 \to P=0$

$X=2 \to 7=P$ e $X^3=8$ $(7,8)$

$X \geq 3 \to X-1 \geq 2$ e $X^2+X+1 \geq 9+3+1 = 13$

QUINDI $(X-1)(X^2+X+1)$ è prodotto di due numeri diversi da 1 e non è primo!