COMBINATORIA

LEZIONE 1A www.problemisvolti.it

Prof. Callejon Università di Roma.

P.1 Quanti sono gli anagrammi di APE

A → P → E
A → E → P
P → A → E
P → E → A
E → P → A
E → A → P

1 SOLA POSSIBILITÀ PER L'ULTIMA LETTERA

⟺ DIAGRAMMA AD ALBERO

DUE SCELTE PER LA SECONDA LETTERA

TRE SCELTE PER LA PRIMA LETTERA

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ANAGRAMMI

P.2 CISTERNA → 8 LETTERE

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ ANAGRAMMI

VOGLIAMO
- 1) CONTARE ANAGRAMMI
  - a) LETTERE DIVERSE
  - b) LETTERE CHE SI POSSONO RIPETERE
- 2) UTILIZZARE ANAGRAMMI PER CONTARE ALTRE COSE

IN GENERALE, PER UNA PAROLA DI n LETTERE DIVERSE $P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 =$
$= n!$ si legge n fattoriale

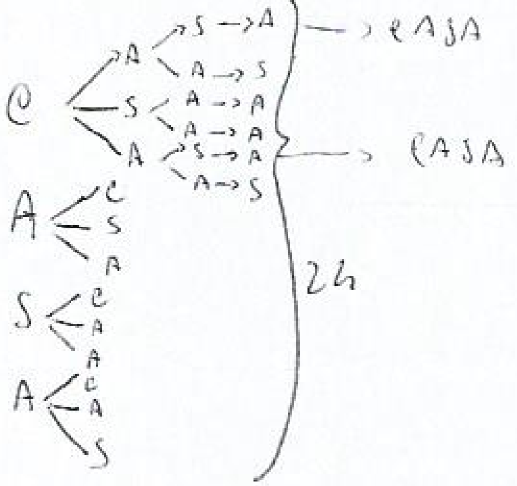
NON DEVONO ESSERE PER FORZA LETTERE → 8 RAGAZZI DA METTERE IN FILA → $8! = 40320$

N.B. $\boxed{1! = 1}$ $\boxed{0! = 1 \text{ PER DEFINIZIONE}}$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$; $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

CONTARE ANAGRAMMI CON LETTERE CHE SI RIPETONO

1) CASA A DUE VOLTE



$A = 2$
$C = 1$
$S = 1$

$$\text{ANAGRAMMI} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 12$$

2) BANANA

$B = 1$
$A = 3$
$N = 2$

$$\text{ANAGRAMMI} = \frac{6!}{1!\,3!\,2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 60$$

3) ATTACCATA

$A = 4$
$T = 3$
$C = 2$

$$\frac{9!}{4!\,3!\,2!} = \frac{9 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = 63 \cdot 20 = 1260$$

UNA PROPRIETÀ CHE SI UTILIZZA SPESSO PER SEMPLIFICARE I CALCOLI È LA SEGUENTE

$P_n = n! = n \cdot (n-1)!$ oppure $P_n = n! = n \cdot (n-1)(n-2)!$

ES: $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3!$

IN GENERALE: PAROLA DI n LETTERE DI K TIPI DIVERSI

3

LETTERA $x_1 \to n_1$ VOLTE

$x_2 \to n_2$ VOLTE

$\ldots$

$x_k \to n_k$ VOLTE

$k \leq n \qquad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

$$\text{ANAGRAMMI} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_k!}$$

IN QUANTI MODI POSSO METTERE IN FILA 3 PALLINE BIANCHE E 4 PALLINE NERE

$$\underset{\text{PALLINE}}{7} \begin{cases} A \to 3 \\ B \to 4 \end{cases}$$

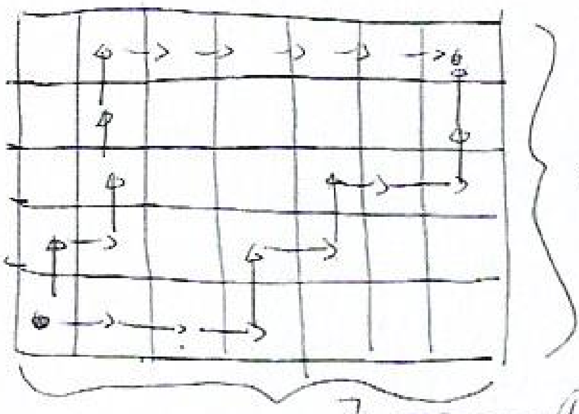
AABBABB → È UNA POSSIBILE FILA MA ANCHE UN ANAGRAMMA

$$\frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,3!} = 35 \text{ FILE DIVERSE}$$

LEZIONE 1B

Problemi risolubili col conteggio di anagrammi

$\boxed{\text{Prob. 1}}$ Data una tabella 5x7, una pulce inizialmente è in basso a sinistra e deve arrivare nella casella in alto a destra potendosi spostare di un passo alla volta a destra (D) o in alto (A)



5 → (4) SPOSTAMENTI IN ALTO (A)

7 → (6) SPOSTAMENTI A DESTRA (D)

D D D A D A D D A A

A D A A A D D D D D

ANAGRAMMI DI UNA PAROLA DI 10 LETTERE

DI CUI 6D + 4A

$$\frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\,4!} =$$

$$= \frac{10\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2} = 210$$

$\boxed{\text{PROB 2}}$ In una classe di 7 studenti, in quanti modi posso scegliere 3 per interrogarli?

ANNA	BRUNO	CARLO	DINO	EMMA	FRANCO	GIOVANNI
S	N	S	N	S	N	N

{ANNA, CARLO, EMMA} → S N S N S N N

{ANNA, FRANK, GIOVANNI} $\rightarrow$ SNNNNSS

ANAGRAMMI DI UNA PAROLA 7 LETTERE DI CUI 3 S E 4 N

$$\frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!}\,\cancel{4!}} = 7 \cdot 5 = 35$$

CAPITA DI AVERE ESPRESSIONI DI QUESTO TIPO:

$$\frac{10!}{6!\,4!} \quad \frac{7!}{3!\,4!} \rightarrow \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Si legge n su k e si chiama coefficiente binomiale.

N.B. $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!\,3!}$ $\quad \binom{7}{4} = \frac{7!}{3!\,4!}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

N.B SE $n = k$ $\rightarrow \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$

Se $0! = 1$ $\quad \binom{n}{0} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

Prob 3 In un gruppo di 100 persone, ciascuno stringe la mano ad ogni altra persona solo una volta. Quante sono le strette di mano? (3)

Ogni stretta di mano corrisponde ad un sottoinsieme di due persone!!!

ANAGRAMMI DI UNA PAROLA DI 100 LETTERE DI CUI 2S + 98N

2S
98N

N —
S —
N —
S —
N —
N —
N —
N —
N —

100

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{2!\,98!} = \frac{100 \cdot 99 \cancel{98!}}{2!\,\cancel{98!}} = 50 \cdot 99 = 4950$$

N.B. Il 1 dà 99 strette, il 2° dà 99 strette → $100 \cdot 99$ strette / 2 perché ogni stretta viene al doppio

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} \qquad \binom{100}{2} = \frac{100!}{2!\,98!}$$

3 STUDENTI — DUE PERSONE

IN GENERALE

$$n \begin{cases} S \to k \text{ scelti} \\ N \to n-k \text{ non scelti} \end{cases}$$

N —
S —
S —
S —
S —
N —
N —

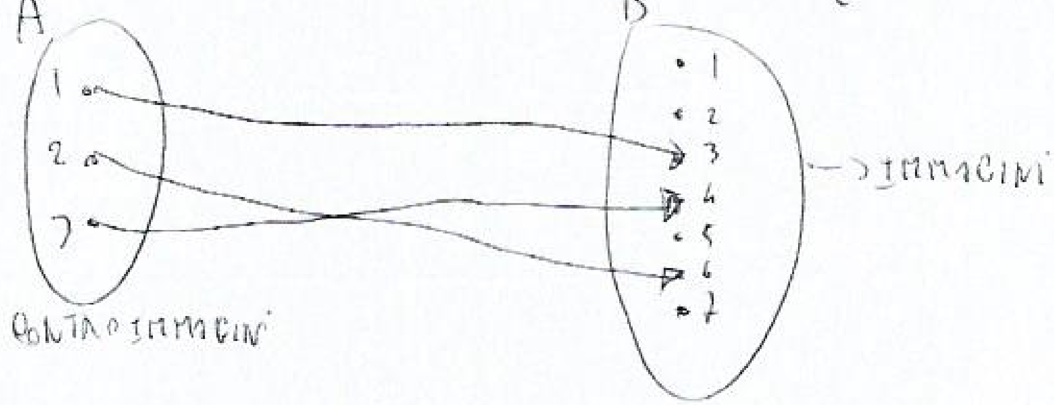
k
n

ANAGRAMMI DI UNA PAROLA DI n LETTERE DI CUI k → S e n−k → N

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k o di classe k, cioè in quanti modi posso scegliere k oggetti da un insieme di n oggetti $k \leq n$ (in modo tale che non sia importante l'ordine)

PROB. 4 Quante sono le funzioni strettamente crescenti da $A = \{1, 2, 3\} \to B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?



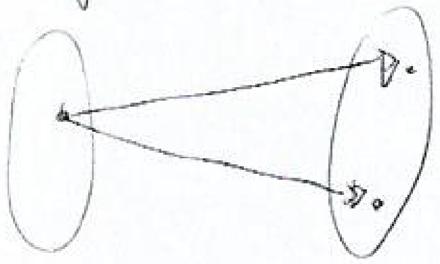
funzione: è una legge che ad un elemento di A associa 1 solo elemento di B

$f(1) = 3$

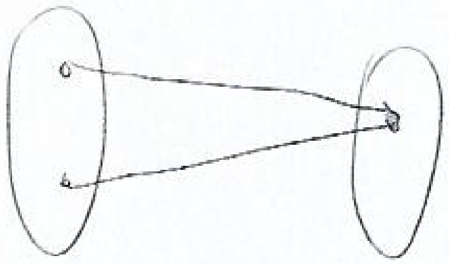
$f(2) = 6$

$f(3) = 4$

Una funzione è un "insieme di frecce" tale che da ogni punto di A parte una sola freccia.



non è una funzione.



è una funzione.

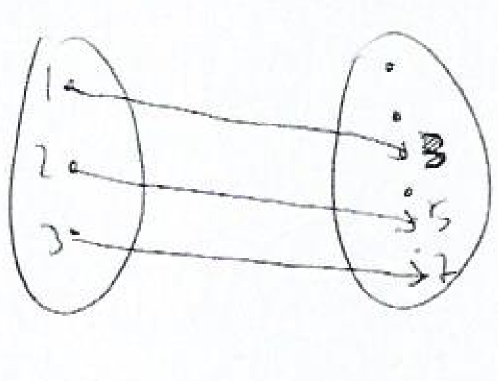
Strettamente crescente?

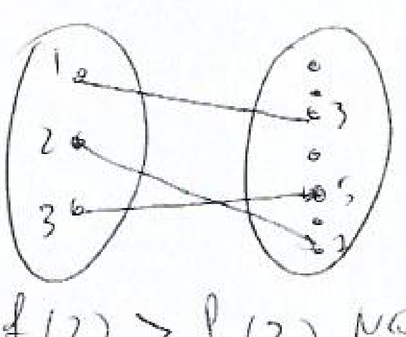
comunque prendo $n, m \in A$,

se $n < m \to f(n) < f(m)$

$f(1) = 3 \qquad f(2) = 5 \qquad f(3) = 7$

$1 < 2 \to f(1) = 3 < f(2) = 5$



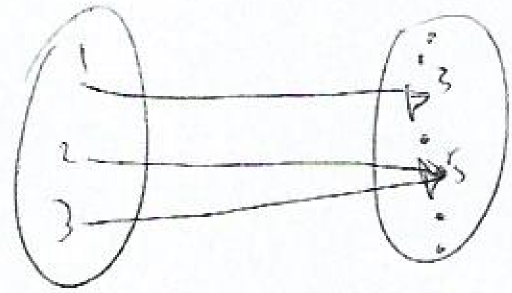


$2 < 3 \to f(2) > f(3)$ NO!

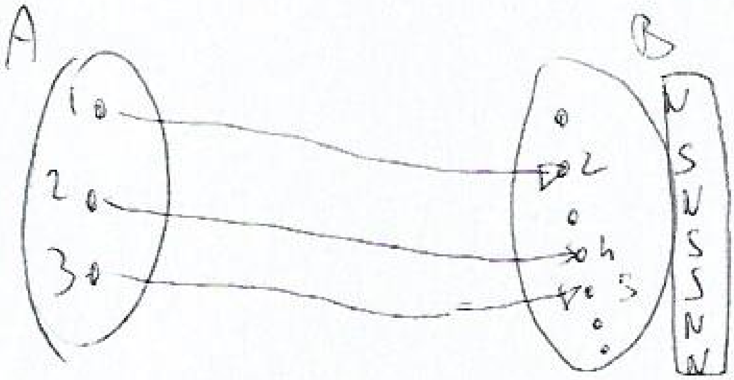
Le code e le punte sono ordinate allo stesso modo, le frecce non si incrociano!

Se $n < m \rightarrow f(n) \leq f(m)$ debolmente crescente

↑ uguale (non decrescente).



$f(2) = f(3)$



ANAGRAMMA DI 7 LETTERE DIVISE 4N? ~~[illegible]~~?

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

Considero gruppi di 3 in B determino e una funzione strettamente crescente

LEZIONE 10

Problemi riconducibili al caso di anagrammi!!!

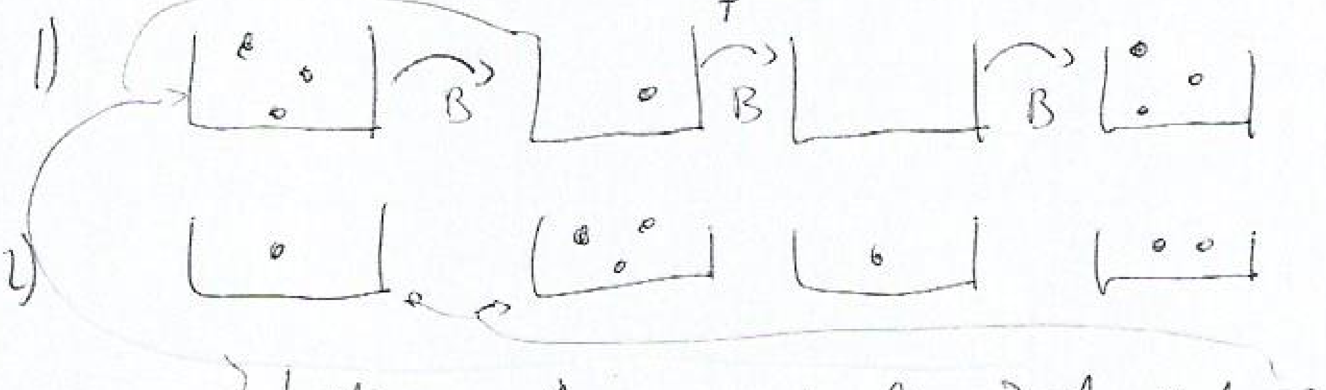
Prob. 5) Un papà ha 4 figli e 7 caramelle (uguali)

ovvero distinguibili

In quanti modi si può distribuire le caramelle ai figli?

Trattiamo il caso, anche quello "ingiusto", cioè quello che un figlio non riceve caramelle.

PASSAGGIO = B



2 figli scambiati e poi 3-1 o 1-3 scambiati!

1) A A A B A B B A A A

Le caramelle le rappresento con la A e i "separatori" di bambini con la B.

2) A B A A A B A B A A

7 A → 7 caramelle

3 B → 4 bambini (4-1 separatori)

Ad ogni parola corrisponde una distribuzione delle caramelle e viceversa!!!

Esempio

AAAA BBBAAA

$$10 \begin{cases} 7A \\ 3B \end{cases} \qquad \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cancel{7!}}{\cancel{7!}\,3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3} = 120$$

Probl. 6) Quante sono le quaterne (x_1, x_2, x_3, x_4) di numeri interi non negativi che soddisfano l'equazione $x_1+x_2+x_3+x_4=7$

$(3, 1, 0, 3)$; $(1, 1, 1, 4)$; ...

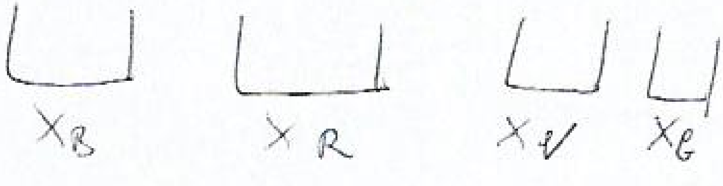
AAABABBAAA ABABABAAAA

Quante sono?

Questo problema è analogo al precedente!!!

Probl. 7) 4 tipi di palline: Bianche, Rosse, Verdi, Gialle. In quanti modi posso riempire un cestino con 7 palline?

$\boxed{\text{COMBINAZIONI}}$



$x_B + x_R + x_V + x_G = 7$

$3B + 2R + 1V + 1G \to AAABAABABA$

$$\frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE (NON SEMPLICI COME PRIMA)

GENERALIZZAZIONE

In quanti modi posso prendere n (palline caramelle) oggetti scelti tra k tipi diversi (k sapori diversi, k colori diversi)

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$$

$$\underbrace{AAAA}_{x_1}\ B\ \underbrace{AAA\dots A}_{x_2}\ B\ \underbrace{AA\dots A}_{x_2}\ B\ \underbrace{A\dots A}_{x_k}$$

Ho n lettere A e (k-1) separatori o lettere B

$\begin{cases} n \text{ lettere } A \\ k-1 \text{ lettere } B \end{cases}$ → in tutto ho n+k-1 lettere

$$\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1} = \left(n\right.$$

SAPER RISCRIVERE!!!

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3}$$

$$= 120$$

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7}$$

$\boxed{\text{Probl. 8}}$ In quanti modi posso distribuire

al più 5 caramelle e 3 bimbi?

Potrei non darne nessuna!!!

1) Forza bruta

5 Caramelle → 3 Bimbi
5 A e 2 B $\qquad \dfrac{7!}{5!\,2!} = \dfrac{7 \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,\cancel{2!}} = 21$

4 Caramelle → 3 Bimbi
4 A e 2 B $\qquad \dfrac{6!}{4!\,2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,2!} = 15$

3 Caramelle → 3 Bimbi
3 A e 2 B $\qquad \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2!}} = 10$

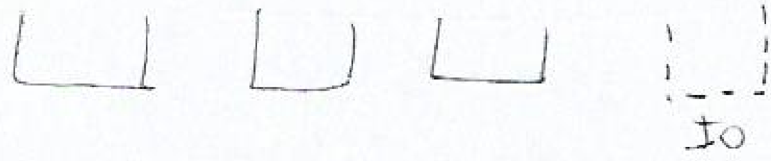
2 $\qquad = 6$

1 $\qquad = 3$

0 $\qquad = 1$

$$\left.\begin{matrix} 21 \\ 15 \\ 10 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right\} 56 \text{ modi}$$

II) SOLUZIONE (FURBA)



4 BIMBO FITTIZIO, CIOÈ IO, E MI TENGO LE CARAMELLE CHE NON DISTRIBUISCO

5 Caramelle 4 Bimbi

$$\underbrace{5A \to 3B}_{8}$$

$$\frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,3!} = 56 \text{ modi!!!}$$

Figuratevi cosa sarebbe stato distribuire 100 caramelle!!!

Problema 9. Quante sono le terne (x_1, x_2, x_3) di interi non negativi tali che $x_1+x_2+x_3 \le 5$

La somma non supera 5, è al più 5 !!!

È lo stesso problema di prima!

1 Forza bruta

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=5 \\ \text{———} = 4 \\ \text{———} \; 3 \\ \text{———} \; 2 \\ \text{———} \; 1 \\ \text{———} \; 0 \end{array}\right\} 56$$

2 MODO FURBO

AGGIUNGO x_4 FITTIZIA

$$x_1+x_2+x_3+x_4=5$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1+x_2+x_3\le 5$$

$5A$ e $3B \to \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = 8\cdot$

EFFETTO COLLATERALE

~~EFFETTO~~

P.8

$$\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=$$

6

$$=56$$

DOUBLE COUNTING.

$$\binom{8}{3}=56$$

$$\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=\binom{8}{3}$$

P.10

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\cdots\binom{20}{4}=$$

PROBLEMA 16 CARAMELLE $\rightarrow$ 5 BIMBI

CORRISPONDENTE

SE ~~NE~~ DISTRIBUISCO 16 CARAMELLE A 5 BIMBI

$$20\begin{cases}16\,A\\4\,B\end{cases}\quad\frac{20!}{4!\,16!}=\binom{20}{4}$$

$19 \begin{cases} 15A \\ 4B \end{cases} \quad \frac{19!}{4!\,15!} = \binom{19}{4}$ 15 CAR → 5 BIMBI

$18 \begin{cases} 14 \\ 4 \end{cases} \quad \frac{18!}{4!\,14!} = \binom{18}{4}$ 14 CAR → 5 BIMBI

$$\binom{17}{4}$$

$\vdots$

$5 \begin{cases} 1A \\ 4B \end{cases} \quad \frac{5!}{4!\,1!} = \binom{5}{4} = 5$ 1 CARAMELL → 5 BIMBI

$4 \begin{cases} 0A \\ 4B \end{cases} \quad \frac{5!}{5!\,0!} = 1$ 0 CARAMELL → 5 BIMBI

16 CARAMELLE → 6 BIMBI (FURBA)

$21 \begin{cases} 16A \\ 5B \end{cases} \quad \frac{21!}{16!\,5!} = \binom{21}{5} = \frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!}\,5!}$

$$= \frac{21\cdot \cancel{20}\cdot 19\cdot \cancel{18}^{3}\cdot 17}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 21\cdot 19\cdot 3\cdot 17 = 20349$$

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{k+p}{k} = \binom{k+p+1}{k+1}$$ DOUBLE COUNTING

~~k+1 bimbi~~

Problema Aux lino!

In generale meno a $(k+1)$ bimbi

posso dare al più p. caramelle!